25/10/16.

Εξίσωση Chapman - Colmogorov

$$P^{n+m} = P^n \cdot P^m$$

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(n)} \cdot P_{kj}^{(m)}$$

π.χ. $S = \{0,1,2\} \Rightarrow P_{02}^{(10)} = P_{02}^{(7+3)} = P_{00}^{(7)} \cdot P_{02}^{(3)} + P_{01}^{(7)} P_{12}^{(3)} + P_{02}^{(7)} \cdot P_{22}^{(3)}$

Ορισμοί Επικοινωνίας

1ος Ορισμός: Η κατάσταση $j \in S$. Ονομάζεται προσιτή από την $i \in S$ αν $(\exists n \geq 0): P_{ij}^{(n)} > 0$ $(i \to j)$

2ος Ορισμός: Δύο καταστάσεις $i, j \in S$ λέμε ότι επικοινωνούν αν $(\exists n \geq 0): P_{ij}^{(n)} > 0$ και $(\exists m \geq 0)$: $P_{ji}^{(m)} > 0$ $(i \leftrightarrow j)$

Πρόταση: Μια σχέση επικοινωνίας είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδ: $i \leftrightarrow i$ (ανακλαστική) $\quad i \to j \Rightarrow j \to i$ (συμμετρική) $\quad \left.\begin{matrix} i \leftrightarrow j \\ j \leftrightarrow k \end{matrix}\right\} \Rightarrow i \to k$ (μεταβατική).

• Για $n = 0 \Rightarrow P_{ii}^{(0)} > 0$ (ανακλαστική)

• $\left.\begin{matrix} \exists n \geq 0 : P_{ij}^{(n)} > 0 \\ \exists m \geq 0 : P_{ji}^{(m)} > 0 \end{matrix}\right|$ για $i \leftrightarrow j$ — οπότε αν αλλάξω τις δύο γραμμές της απόδειξης έχω ότι $j \leftrightarrow i$

• $i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists n \geq 0 : P_{ij}^{(n)} > 0$

$\exists m \geq 0 : P_{ji}^{(m)} > 0$

$j \leftrightarrow k \Rightarrow \exists \alpha \geq 0 : P_{jk}^{(\alpha)} > 0$

$\exists \beta \geq 0 : P_{kj}^{(\beta)} > 0$

$$0 < P_{ij}^{(n)} \cdot P_{jk}^{(\alpha)} \leq \sum_{\ell \in S} P_{i\ell}^{(n)} P_{\ell k}^{(\alpha)} = P_{ik}^{(n+\alpha)}$$

$$0 < P_{kj}^{(\beta)} \cdot P_{ji}^{(m)} \leq \sum_{\ell \in S} P_{k\ell}^{(\beta)} \cdot P_{\ell i}^{(m)} = P_{ki}^{(\beta+m)}$$

άρα $i \leftrightarrow k$

Scanned by CamScanner

Άρα τελικά η σχ. επικ. είναι σχ. ισοδ.

<u>Παρατήρηση</u>: Οι καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους φτιάχνουν μια κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι όλες είναι του ίδιου τύπου.

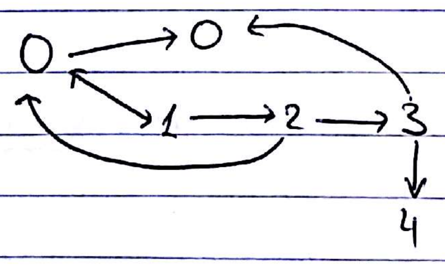
<u>3ος ορισμός</u>: Αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα έχει όλες τις καταστάσεις της να ανήκουν σε μία κλάση (και μόνο σ'αυτήν) ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων τότε λέγεται μη-διαχωρίσιμη μαρκοβιανή αλυσίδα.

<u>Ασκ</u> 14

$$P=\begin{array}{c|l} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & \dots & \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & \dots & \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & \dots \\ \vdots & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

: πίνακας μετάβασης.

• <u>Ερώτημα</u>: Ποιες καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους.



άρα $P_{02}^{(2)}>0$.
(Δεν μας ενδιαφέρει ποιον αριθμό βημάτων θα βρούμε).

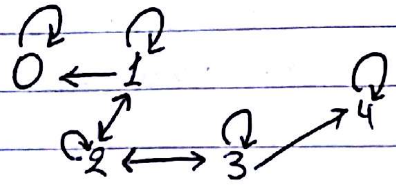
Άρα έχω μη-διαχωρίσιμη Μαρκοβιανή Αλυσίδα (όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν)

<u>Πχ</u>: Δίνεται ο πίνακας μετάβασης 5 καταστάσεων:

$$P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-p-q & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-p-q & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

X_n: ~~το κέρδος~~ τα χρήματα ενός παίκτη που στοιχηματίζει σε ένα παιχνίδι κάθε φορά 1€, κερδίζει με πιθανότητα P,

χάνει με πιθανότητα q, ισοπαλία με πιθανότητα 1-p-q.
Το παιχνίδι τελειώνει όταν τα χρήματά του γίνουν 0 ή 4€ (Δύο φράγματα απορρόφησης).



Επικοινωνεί η 0 με την 1?
Απ: Όχι δηλ. $0 \not\leftrightarrow 1$
Όμως 0 προσιτή με την 1.
$1 \leftrightarrow 3$? → ΝΑΙ
4 δεν επικοινωνεί με κάποια.
(απορροφητές) 0, 4 καταστάσεις μόνες τους.
1, 2, 3 : επικοινωνούν μεταξύ τους.

Ορισμοί Επαναληψιμότητας

Έχουμε συμβολίσει $P_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=i)$
Συμβολίζουμε με $f_{ij}^{(n)} = P$(να πάω $i \to j$ για πρώτη φορά στο n-οστό βήμα)
$= P(X_n=j, X_r \neq j \ \forall r<n \mid X_0=i)$

Συμβολισμός: $f_{ij}^{(*)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P$(να φτάσω οποιαδήποτε στιγμή στο j ξεκινώντας από το i για πρώτη φορά)

Προσοχή!! : $f_{ij}^{(n)} \neq P_{ij}^{(n)}$ (μπορεί να τύχει όμως γενικά είναι διαφορετικά).

Ορισμός 1ος : Μια κατάσταση λέγεται επαναληπτική $\Leftrightarrow f_{ii}^{*} = 1$

Ορισμός 2ος : Μια κατ/ση λέγεται παροδική $\Leftrightarrow f_{ii}^{*} < 1$.

Ορισμός 3ος : Οι επαν/κές χωρίζονται σε 2 μεγάλες κατηγορίες: τις ασθενώς επαν/κές αν ο αναμενόμενος αριθμ. βημάτων επιστροφής 1ης φοράς είναι $= +\infty$ και στις θετικώς επαν/κές αν ο αναμενόμενος αριθμ. βημάτων επιστροφής 1ης φοράς είναι πεπερασμένος.

Ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων συμβ. με ~~[illegible]~~

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{τιμή} \\ \text{τ.μ.}}}{n} * \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αντίστοιχη} \\ \text{πιθανότητα}}}{f_{ii}^{(n)}}$$

π.χ. Πίνακας Μετάβασης:

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & \dots \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & \dots \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \dots \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$P_{k0} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$P_{k\,k+1} = \frac{1}{k+2} \Rightarrow 1 - \frac{k+1}{k+2}$$

Να προσδιοριστούν οι καταστάσεις.

Όλες οι καταστάσεις επικ. μεταξύ τους ⇒
⇒ ανήκουν στην ίδια κλάση. ⇒ μη-διαχ. Μαρκ. αλυσίδα.
Άρα αρκεί να εξετάσω μία κατάσταση ως προς την επαναληπτικότητα.

Με βάση τον ορισμό, προσδιορίζω αν f_{00}: επαναληπτική ή όχι
– Άρα ψάχνω $f_{00}^{*} = ?$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$

$$f_{00}^{(1)} = 1/2$$

$$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$f_{00}^{(4)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{(n)} = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \overset{(*)}{=} 1$$

(*) Δίνεται: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = e - 1.$$

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{n!\,(n+1)} = \frac{n}{n!\,(n+1)} = \frac{n}{(n+1)!}$$

Άρα έχω επαναληπτική κατάσταση.
Άρα θέλω να ελέγξω θετικώς/ασθενώς επ/κή.

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = e-1$$ (απ' τη σχέση που δίνεται)

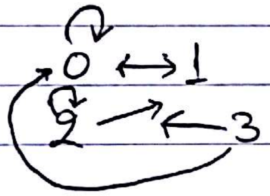
άρα θετικώς επ/κή!

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$

<u>2º Παράδειγμα</u>:

Ταξινομείστε τις κατ/σεις ως προς την επικοινωνία και εξετάστε αν 3: επαν/κή/παροδική και το ίδιο για τη 2.

Λύση:



Η 2 επικ. με την 3? ⇒ ΌΧΙ γιατί η 2 δεν πηγαίνει στην 3.
Ανήκουν 2,3 παροδικές διότι αν φύγω δεν ξαναγυρίζω στις ίδιες καταστάσεις.

Είναι $f_{22}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = 2/3 < 1 \Rightarrow$ παροδική

$f_{22}^{(1)} = \frac{2}{3} = P_{22}^{(1)}$
$f_{22}^{(2)} = P(2 \to 1 \to 2) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$
$f_{22}^{(3)} = P(2 \to 1 \to 0 \to 2) = 0$
$\vdots$

$f_{33}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} < 1 \Rightarrow$ παροδική

$f_{33}^{(1)} = 0$
$f_{33}^{(2)} = P(3 \to 2 \to 3$ ή $3 \to 0 \to 3) = 0$
$\vdots$

(Άσκ_15 φυλλάδιο).

Scanned by CamScanner

Ορισμός 1: Η κατάσταση $i \in S$ λέγεται απορροφητική $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P_{ii}^{(1)} = 1$.

Ορισμός_2: Περίοδος μιας κατάστασης $i \in S$ λέγεται ο ΜΚΔ d_i, όλων των ακεραίων $n \geq 1$ για τους οποίους $P_{ii}^{(n)} > 0$

Ορισμός_3: Μια κατάσταση λέγεται απεριοδική αν $d_i = 1$.

Ορισμός_4): Μια κατάσταση λέγεται εργοδική αν είναι θετικώς επ/κή και απεριοδική.

π.χ.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Να βρεθούν οι περίοδοι κάθε κατ/σης.

$P_{00}^{(1)} > 0 \Rightarrow \boxed{d_0 = 1}$

$P_{11}^{(1)} = 0$
$P_{11}^{(2)} > 0$
$P_{11}^{(3)} > 0$

$\Big\}$ ΜΚΔ$(2,3,\ldots) = 1 \rightarrow \boxed{d_1 = 1}$

$P_{22}^{(1)} > 0 \Rightarrow \boxed{d_2 = 1}$

Στο 3 δεν έχω περίοδο γιατί 3 δεν ξαναγυρίζει στον εαυτό της

Ασκήσεις_Φυλλαδίου: 5, 24, 29, 46.
· Έχουμε λύσει τη 14 (όμοια λύνεται η 15).

Scanned by CamScanner